Universität Tübingen
Fachbereich Mathematik
D. Agostini, C. Nollau

Geometrie
WS 2024/25

EBERHARD KARLS UNIVERSITÄT TÜBINGEN

Blatt 2

Die Lösungen sollten auf URM hochgeladen werden. Abgabetermin: 05.11, 16:00.
Bitte begründen Sie Ihre Lösungen und zeigen Sie Ihre Argumentation auf.
Bitte notieren Sie Ihren Namen und Ihre Immatrikulationsnummer an. Wenn Sie die Aufgaben in einer Gruppe einreichen, reicht es aus, wenn eine Person die Aufgaben für die ganze Gruppe hochlädt.

Aufgabe 1 (5+5 Punkte)

(i) Betrachten Sie die folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lll} P_1 = (1, -1), & P_2 = (2, 1), & P_3 = (2, 3) \\ Q_1 = (3, -2), & Q_2 = (4, -3), & Q_3 = (8, 1) \end{array}$$

Finden Sie eine affine Transformation $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ oder zeigen Sie, dass keine solche Transformation existiert.

(ii) Betrachten Sie die folgende Punkte in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{lll} P_1 = (1, 2), & P_2 = (3, 4), & P_3 = (5, 6) \\ Q_1 = (2, 1), & Q_2 = (8, 10), & Q_3 = (10, 13) \end{array}$$

Finden Sie eine affine Transformation $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass $f(P_i) = Q_i$ für $i = 1, 2, 3$ oder zeigen Sie, dass keine solche Transformation existiert.

Aufgabe 2 (10 Punkte) Wir betrachten die folgende Geraden in $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{ll} L_1 = \{x = 0\} & L_2 = \{x - 1 = 0\} \\ M_1 = \{y = 0\} & M_2 = \{y - 1 = 0\} \end{array}$$

Finden Sie alle affine Transformationen $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ so dass $f(L_i) = M_i$ für $i = 1, 2$, oder zeigen Sie dass keine solche Transformation existiert.

Aufgabe 3 (2+3+5 Punkte) Seien $L_1, L_2, L_3 \subseteq \mathbb{R}^2$ drei paarweise unterschiedliche Linien, so dass sich zwei beliebige von ihnen treffen, aber nicht alle im selben Punkt

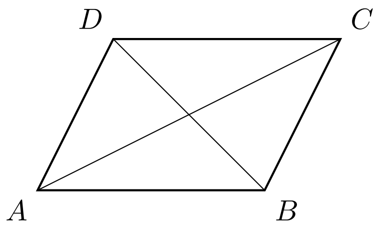
(i) Zeigen Sie, dass sich zwei dieser Geraden in nur einem Punkt treffen. Wir bezeichnen diese Punkte als $\{P_{ij}\} = L_i \cap L_j$. Zeigen Sie auch dass diese Punkte paarweise verschiedene sind.

(ii) Zeigen Sie, dass die drei Punkte P_{12}, P_{13}, P_{23} paarweise verschiedene und nicht kollinear sind.

(iii) Seien nun, M_1, M_2, M_2 drei andere paarweise verschiedene Geraden die so dass sich zwei beliebige von ihnen treffen, aber nicht alle im selben Punkt. Zeigen Sie, dass eine einzige affine Transformation $f \in \operatorname{Aff}(\mathbb{R}^2)$ existiert, so dass

$$f(L_i) = M_i \qquad \text{für } i = 1, 2, 3$$

Aufgabe 4 (10 Punkte) Seien $A = (x_A, y_A), B = (x_B, y_B), C = (x_C, y_C), D = (x_D, y_D) \in \mathbb{R}^2$ paarweise verschiedene Punkte, so dass die beiden Geradenpaare $L(A, B), L(C, D)$ und $L(A, D), L(B, C)$ parallel sind. Wir nehmen auch an, dass die beiden Geraden $L(A, B), L(A, D)$ nicht parallel sind, so dass wir ein Parallelogramm wie in der Abbildung haben



Zeigen Sie, dass sich die Geraden $L(A, C), L(B, D)$ genau in einem Punkt P treffen und dass

$$P = \frac{1}{2}(A + C) = \frac{1}{2}(B + D)$$